HẠNG CỦA MA TRẬN & HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

Tác giả: Phạm Gia Hưng
Bộ môn Toán - Khoa KHCB
Năm học 2004 - 2005

I. Mục đích.

Việc giải bài toán hệ phương trình tuyến tính có một ý nghĩa rất to lớn trong nghiên cứu khoa học cũng như trong thực tế. Lý thuyết hạng của ma trận nhằm để giải quyết bài toán: *Khi nào thì hệ phương trình tuyến tính có nghiệm?*

Trong các tài liệu giảng dạy môn Toán Cao Cấp ở các trường Đại Học, thông thường, người ta dùng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng hoặc các cột của ma trận đưa ma trận về dạng hình thang để xác định được hạng của ma trận. Điều này sẽ tăng khối lượng tính toán. Hơn nữa điều chủ yếu đáng nói ở đây là vấn đề logic trình bày. Khi giải hệ phương trình tuyến tính bằng phương pháp Gauss khi ta chỉ dùng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận đưa ma trận về dạng bậc thang và khi nhìn vào ma trận bậc thang này sinh viên sẽ dễ lúng túng khi xác định hạng của ma trận hệ số cũng như ma trận mở rộng và từ đó khó lòng biện luận được số nghiệm của hệ phương trình.

Đề tài đưa ra là nhằm để khắc phục vấn đề nói trên. Xin cám ơn sự đóng góp ý kiến của anh em đồng nghiệp.

II. Tài liệu tham khảo.

[1] Nguyễn Đình Trí (Chủ Biên): *Toán Cao Cấp, Tập II.* NXB Giáo Dục 2000.
[2] Phạm Gia Hưng: *Bài Giảng Toán Cao Cấp C2.* Nha Trang 2004.

III. Nội dung.

1. Hạng của ma trận.

Định nghĩa 1. Cho $A \in Mat(m \times n)$. Ta gọi

(i) Định thức con cấp k của A là định thức được suy từ A bằng cách bỏ đi $m - k$ hàng và $n-k$ cột.

(ii) Hạng của A là cấp cao nhất trong các định thức con khác 0 của A, ký hiệu

$$r(A) = rank(A)$$

và quy ước coi hạng của ma trận không là bằng 0.

Nhận xét. Nếu mọi định thức con cấp k của A đều bằng không, thì mọi định thức con có cấp cao hơn k của A cũng đều bằng không. Từ định nghĩa suy ra

• $r(A) = r \Leftrightarrow A$ tồn tại có ít nhất một định thức con cấp r khác 0 và mọi định thức con cấp $r+1$ đều bằng 0.

• Nếu $A \in Mat(m\times n)$, $A \neq O$, thì $0 < r(A) \leq \min\{m,n\}$.

• Nếu $A \in Mat(n\times n)$, thì $r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$ hay $r(A) < n \Leftrightarrow \det A = 0$.

Định lý 1. Hạng của ma trận không thay đổi qua các phép biến đổi sơ cấp. Nói cách khác, nếu với ma trận A ta thực hiện một số phép biến đổi sơ cấp để tới ma trận T thì $r(A) = r(T)$.

Chứng minh. Dựa vào định nghĩa hạng của ma trận và các tính chất của định thức.

Định nghĩa 2. Ma trận bậc thang là ma trận có hai tính chất như sau

(i) Các hàng khác 0 luôn ở trên các hàng bằng 0.

(ii) Trên hai hàng khác 0 thì phần tử khác 0 đầu tiên ở hàng dưới bao giờ cũng ở bên phải cột chứa phần tử khác 0 đầu tiên ở hàng trên.

Ví dụ. Các ma trận sau đây là ma trận bậc thang

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nhận xét.

(n1) Hạng của ma trận bậc thang bằng số hàng khác 0 của nó.

(n2) Dựa vào định lý trên, ta có thể dùng các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận để đưa ma trận A về ma trận bậc thang.

Ví dụ. Tìm hạng của ma trận A bằng các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận

(v1) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{H_4 \to H_4 - 2H_1}]{\substack{H_2 \to H_2 - H_1 \\ H_3 \to H_3 - H_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{H_3 \to H_3 + H_2 \\ H_4 \to H_4 + H_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T.$$

Vậy $r(A) = r(T) = 3$.

(v2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{H_2 \to H_2 - 2H_1 \\ H_3 \to H_3 + 2H_1 \\ H_4 \to H_4 - H_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[H_4 \to H_4 - H_2]{H_2 \leftrightarrow H_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = T.$$

Vậy $r(A) = r(T) = 3$.

2. Phương pháp Gauss giải hệ phương trình tuyến tính.

Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

trong đó $a_{ij}, b_i \ (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ là các hằng số cho trước thuộc *K* (*K*=*R*,*C*). Ký hiệu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ta gọi *A* là ma trận hệ số, $\overline{A}$ là ma trận mở rộng của hệ (*). Khi đó hệ (*) có thể viết dưới dạng ma trận

$$AX = B.$$

Định nghĩa 3. Phép biến đổi sơ cấp trên một hệ phương trình tuyến tính là một trong các phép biến đổi sau

(p1) Đổi chỗ hai phương trình của hệ cho nhau.

(p2) Nhân một phương trình của hệ với một số khác không.

(p3) Cộng vào một phương trình với một phương trình khác của hệ.

Dễ thấy rằng, việc thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên một hệ phương trình, ta đi tới một hệ phương trình tương đương với hệ đã cho.

Định lý 2.

(i) Hệ (*) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $r(A) = r(\overline{A}) = \text{số ẩn}$.

(ii) Hệ (*) có vô số nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\overline{A}) < \text{số ẩn}$.

(iii) Hệ (*) vô nghiệm khi và chỉ khi $r(A) < r(\overline{A})$.

Nhận xét. Thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên hệ phương trình tuyến tính thực chất là thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên các hàng của ma trận mở rộng $\overline{A}$ của hệ. Việc thực hiện đó sẽ đưa $\overline{A}$ về một ma trận bậc thang và tương ứng với ma trận này là hệ phương trình tương đương với hệ ban đầu nhưng dễ giải hơn.

Ví dụ. Giải hệ phương trình (trong trường hợp có tham số *m*, hãy giải và biện luận) (v1) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4t = 2 \\ 3x + 3y - 5z + t = -3 \\ -2x + y + 2z - 3t = 5 \\ 3x + 3z - 10t = 8 \end{cases}$ (v2) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 1 \\ 2x - y - 2z - 3t = 2 \\ 3x + 2y - z + 2t = -5 \\ 2x - 3y + 2z + t = 11 \end{cases}$

(v3) $\begin{cases} x + 2y - 3z + 5t = 1 \\ x + 3y - 13z + 22t = -1 \\ 3x + 5y + z - 2t = 5 \\ 2x + 3y + 4z - 7t = 4 \end{cases}$ (v4) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$

__Lời giải.__

(v1) Ta có

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{H_3 \to H_3 + 2H_1 \\ H_4 \to H_4 - 3H_1}]{H_2 \to H_2 - 3H_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[H_4 \to 3H_4 - 2H_2]{H_3 \to 3H_3 + H_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow{H_4 \to H_4 - H_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right) = T.$$

Ma trận *T* ứng với một hệ phương trình tương đương với hệ phương trình ban đầu; hệ phương trình này vô nghiệm vì

$$r(A) = 3 < 4 = r(\overline{A}).$$

(v2) Ta có

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{H_3 \to H_3 - 3H_1 \\ H_4 \to H_4 - 2H_1}]{H_2 \to H_2 - 2H_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[H_4 \to 5H_4 - 7H_2]{H_3 \to 5H_3 - 4H_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & 36 & -40 \\ 0 & 0 & 36 & 18 & 45 \end{array}\right) \xrightarrow[H_4 \to H_4 - 4H_3]{H_3 \to -\frac{1}{2}H_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -18 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 90 & -35 \end{array}\right).$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 2t = 1 \\ -5y - 8z + t = 0 \\ 9z - 18t = 20 \\ 90t = -35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12/18 \\ y = -43/18 \\ z = 26/18 \\ t = -7/18 \end{cases}.$$

Ta thấy hệ phương trình có duy nhất nghiệm vì

$$r(A) = r(\overline{A}) = 4 = \text{ số ẩn.}$$

(v3) Ta có

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&5&1\\1&3&-13&22&-1\\3&5&1&-2&5\\2&3&4&-7&4\end{array}\right)\xrightarrow[H_4\to H_4-2H_1]{\substack{H_2\to H_2-H_1\\H_3\to H_3-3H_1}}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&5&1\\0&1&-10&17&-2\\0&-1&10&-17&2\\0&-1&10&-17&2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[H_4\to H_4+H_2]{H_3\to H_3+H_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&5&1\\0&1&-10&17&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right).$$

Hệ phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases}x+2y-3z+5t=1\\ \quad y-10z+17t=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-17z+29t+5\\y=10z-17t-2\\z,t-\text{tuỳ ý}\end{cases}.$$

Hệ phương trình có vô số nghiệm vì

$$r(A)=r(\overline{A})=2<\text{ số ẩn.}$$

(v4) Ta có

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}m&1&1&1\\1&m&1&1\\1&1&m&1\end{array}\right)\xrightarrow{H_1\leftrightarrow H_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&m&1\\1&m&1&1\\m&1&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[H_3\to H_3-mH_1]{H_2\to H_2-H_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&m&1\\0&m-1&1-m&0\\0&1-m&1-m^2&1-m\end{array}\right)=A_1.$$

• Th1: Nếu m = 1 thì ma trận A_1 tương ứng với hệ phương trình có vô số nghiệm

$$x+y+z=1\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-y-z\\y,z-\text{tùy ý}\end{cases}$$

và

$$r(A)=r(\overline{A})=1<\text{ số ẩn.}$$

• Th2: Nếu $m\neq 1$thì

$$A_1\xrightarrow{H_3\to H_3+H_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&m&1\\0&m-1&1-m&0\\0&0&(1-m)(2+m)&1-m\end{array}\right)=A_2$$

* Th2a: Nếu m = -2 thì hệ đã cho vô nghiệm vì ứng với hàng thứ 3 của A_2 là phương trình vô nghiệm $0x+0y+0z=3$ hay nói cách khác do

$$r(A)=2<3=r(\overline{A}).$$

* Th2b: Nếu $m\neq$ -2 thì hệ đã cho tương đương với hệ phương trình có duy nhất nghiệm sau đây

$$\begin{cases}x+y+mz=1\\(m-1)y+(1-m)z=0\\(2+m)z=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{2+m}.$$

và $r(A)=r(\overline{A})=3=$ số ẩn.

Nha Trang, 20/01/2005
Người thực hiện

PHẠM GIA HƯNG