# BÀI TẬP CHƯƠNG I

**Bài 1:**

**Số mã vùng cần thiết nhỏ nhất là bao nhiêu để đảm bảo 25 triệu máy điện thoại khác nhau. Mỗi điện thoại có 9 chữ số có dạng 0XX-8XXXXX với X nhận giá trị từ 0 đến 9.**

**Giải:**

Vì số mã vùng có dạng: 0XX-8XXXXX, với X nhận các giá trị từ 0 đến 9 (10 số), có 07 ký tự X do vậy sẽ có $10^7$ trường hợp. Do đó, theo nguyên lý Dirichlet với 10 triệu máy điện thoại thì số mã vùng cần thiết là: $\left]\frac{25.000.000}{10.000.000}\right[ = ]2,5[ = 3$. Vậy số mã vùng cần thiết thỏa yêu cầu bài toán là 3.

**Bài 2:**

**Biển số xe gồm 8 ký tự, dạng NN-NNNN-XN, ví dụ 75_1576_F1. Hai số đầu là mã tỉnh, X là chữ cái (26 chữ cái). N gồm các số 0, 1, …, 9. Hỏi một tỉnh nào đó cần đăng ký cho 10 triệu xe thì cần bao nhiêu serial (X).**

**Giải**

Bài toán này có 02 cách hiểu: serial ở đây có thể là 02 ký tự NN đầu tiên hoặc là 02 ký tự XN cuối cùng.

*Cách hiểu 1*: (serial là 02 ký tự XN cuối cùng).

Hai số NN đầu là mã tỉnh, do nhà nước quy định nên không ảnh hưởng đến kết quả bài toán.

Sáu ký tự còn lại có 5 ký tự là N, như vậy có $10^5$ trường hợp. Theo nguyên lý Dirichlet, số serial X tối thiểu phải thỏa mãn: $\left]\frac{10.000.000}{100.000}\right[ = 100$. Điều này không hợp lý vì số ký tự chữ cái chỉ là 26. Do vậy, nếu bài toán sửa lại là 1 triệu bảng số xe thì kết quả hợp lý hơn, khi đó số serial là: $\left]\frac{1.000.000}{100.000}\right[ = 10$.

*Cách hiểu 2:* (serial là 02 ký tự NN đầu tiên*)*

Bốn ký tự NNNN sẽ có $10^4$ trường hợp, 02 ký tự XN sẽ có 26*10 = 260 trường hợp. Theo quy tắc nhân, tổng số trường hợp sẽ là: $10^4$*260 = 2.600.000. Do đó, theo nguyên lý Dirichlet, số serial tối thiểu phải là:

$$\left]\frac{10.000.000}{2.600.000}\right[ = ]3,84[ = 4.$$

Vậy cần 04 số serial để đăng ký đủ cho 10 triệu xe.

**Bài 3:**

**Có bao nhiêu xâu nhị phân có độ dài 10:**

a. **Bắt đầu bằng 00 hoặc kết thúc bằng 11.**
b. **Bắt đầu bằng 00 và kết thúc bằng 11.**

**Giải**

a. Bắt đầu bằng 00 hoặc kết thúc bằng 11.

Xâu nhị phân bắt đầu bằng 00 có dạng: 00.xxxx.xxxx. Ký tự x có thể là 0 hoặc 1, có 8 ký tự x do vậy có $2^8$ xâu.

Xâu nhị phân kết thúc bằng 11 có dạng: xx.xxxx.xx11. Tương tư ta cũng tính được có $2^8$ xâu.

Xâu nhị phân bắt đầu bằng 00 và kết thúc bằng 11 có dạng 00.xxxx.xx11. Tương tự như trên, ta cũng tính được có $2^6$ xâu.

Vậy số xâu nhị phân bắt đầu bằng 00 hay kết thúc bằng 11 là:



$n = 2 * 2^8 - 2^6 = 512 - 64 = 448$ xâu.

b. Bắt đầu bằng 00 và kết thúc bằng 11.

Xâu nhị phân thỏa mãn đề bài phải có dạng: 00.xxxx.xx11. Hai ký tự đầu và 02 ký tự cuối là không đổi, do vậy chỉ còn 06 ký tự ở giữa. Do đó số xâu nhị phân thỏa mãn đề bài là: $2^6$ xâu.

**<u>Bài 4:</u>**

**Khóa 29 CNTT có 150 SV học NNLT Java, 160 SV hoc Delphi, 40 SV học cả hai môn trên.**

**a. Tìm tất cả SV của khóa 29 biết rằng SV nào cũng phải học ít nhất 01 môn.**

**b. Biết tổng số SV là 285, hỏi có bao nhiêu SV không học Java hoặc Delphi.**

**<u>Giải</u>**

Gọi J: SV học Java

D: SV học Delphi

a. Số SV của khóa 29 là: $n_1 = |J \cup D| = |J| + |D| - |J \cap D| = 150 + 160 - 40 = 270$ SV

b. Câu b có 02 cách hiểu:

*Cách 01:* không học ít nhất 01 môn.

Số SV không học Java hoặc Delphi là (áp dụng nguyên lý bù trừ) ta tính được: $n_2 = n - J \cap D = 285 - 40 = 245$ SV

*Cách 02:* không học Java cũng chẳng học Delphi:

Theo cách hiểu này, áp dụng nguyên lý bù trừ ta tính được số SV như sau:

$n_2^{'} = \overline{|J \cup D|} = n - |J| - |D| + |J \cap D| = 285 - 150 - 160 + 40 = 15$ SV

**<u>Bài 5:</u>**

**Mỗi người sử dụng máy tính dùng password có 6 -> 8 ký tự. Các ký tự có thể là chữ số hoặc chữ cái, mỗi password phải có ít nhất 01 chữ số. Tìm tổng số password có thể có.**

**<u>Giải</u>**

Bài toán này cũng có thể được hiểu theo 02 cách.

*Cách 01:* phân biệt chữ thường với chữ hoa.

Chữ cái thường: 26

Chữ cái hoa: 26

Chữ số: 10

Do đó, tổng cộng có 26 + 26 + 10 = 62 ký tự khác nhau.

Nếu password có n ký tự.

Tổng số trường hợp: $62^n$

Số password không có chữ số: $52^n$

Suy ra số password có ít nhất 01 chữ số: $n_n = 62^n - 52^n$

Áp dụng cho các trường hợp n = 6, 7, 8. Tổng số password thỏa yêu cầu đề bài là:

$$n = n_6 + n_7 + n_8 = 62^6 - 52^6 + 62^7 - 52^7 + 62^8 - 52^8 = 167.410.949.583.040$$

*Cách 02:* không phân biệt chữ thường với chữ hoa:

Cách làm hoàn toàn tương tự, nhưng thay vì sử dụng các số 62 và 52 thì ở đây sử dụng 02 số: 36 và 26. Kết quả sẽ là:

$$n = n_6 + n_7 + n_8 = 36^6 - 26^6 + 36^7 - 26^7 + 36^8 - 26^8 = 2.684.483.063.360$$

**<u>Bài 6:</u>**

**Có n lá thư bỏ vào n bì thư. Hỏi xác suất để xảy ra trường hợp không có lá thư nào bỏ đúng được bì thư của nó.**

**<u>Giải</u>**

Vì có n phong bì và n bì thư nên có tất cả N = n! cách bỏ thư khác nhau. Để đếm số cách bỏ thư sao cho không lá thư nào đúng địa chỉ, ta áp dụng nguyên lý bù trừ:

$$\overline{N} = n! - N_1 + N_2 - \ldots + (-1)^n N_n,$$

trong đó $N_m$ ($1 \le m \le n$) là số cách bỏ thư sao cho có ít nhất m lá thư đúng địa chỉ, $N_m$ là số cách lấy m lá thư từ n lá, với mỗi cách lấy m lá thư, có (n-m)! cách bỏ để m lá thư này đúng địa chỉ, như vậy:

$$N_m = C_n^m (n-m)! = \frac{n!}{k!} \text{ do vậy } \overline{N} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right),$$

Dođó xác suất thỏa bài toán: $p = \frac{\overline{N}}{N} = \frac{\overline{N}}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^k \frac{1}{k!}$

**Bài 7:**

**Chỉ ra rằng nếu chọn 5 số từ tập 8 số {1, 2, …, 7, 8} thì bao giờ cũng có ít nhất 01 cặp số có tổng là 9.**

**Giải**

Từ 8 số ở trên, ta chia thành 04 cặp: {1, 8}, {2, 7}, {3, 6}, {4, 5} và tổng của mỗi cặp đều bằng 9. Như vậy, đề bài sẽ trở thành chọn 5 số từ 4 cặp số trên. Theo nguyên lý Dirichlet, phải có ít nhất 01 cặp số được chọn hết. Vậy bài toán đã được chứng minh.

**Bài 8:**

**Chứng minh rằng trong bất kỳ một nhóm 27 từ tiếng Anh nào cũng có ít nhất 2 từ bắt đầu từ cùng 01 chữ cái.**

**Giải**

Bảng chữ cái của tiếng anh gồm 26 ký tự: a, b, c, …, x, y, z. Vì có 27 từ tiếng Anh và mỗi từ bắt đầu bằng 01 chữ cái nên theo nguyên lý Dirichlet phải có ít nhất 02 từ bắt đầu bằng cùng 01 chữ cái.

**Bài 9:**

**Cần phải có bao nhiêu SV ghi tên vào lớp TRR để chắc chắn có ít nhất 65 SV đạt cùng điểm thi, giả sử thang điểm thi gồm 10 bậc.**

**Giải**

Gọi n là số sinh viên tối thiểu thỏa mãn đề bài, theo nguyên lý Dirichlet thì $\left]n/10\right[ = 65$. Do vậy $n = 10*64+1 = 641$ SV.

**Bài 10:**

**Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân có độ dài n và không có 2 số 0 liên tiếp.**

**Có bao nhiêu xâu nhị phân như thế có độ dài bằng 5.**

**Giải**

Với xâu nhị phân có độ dài n, ta chia thành 02 trường hợp:

Nếu ký tự cuối cùng là 1 thì ký tự trước đó (ký tự thứ n – 1) có thể là 1 hay là 0 đều được.

Nếu ký tự cuối cùng là 0 thì ký tự trước đó (ký tự thứ n – 1) chỉ có thể là 1 (vì nếu là 0 thì vi phạm yêu cầu bài toán) nhưng ký tự trước đó nữa (thứ n – 2) có thể là 0 hay 1 đều được.

Từ 02 trường hợp trên ta suy ra được: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Các điều kiện đầu: $f_1 = 2$, $f_2 = 3$

Có 13 xâu nhị phân có độ dài 5 và không có 2 số 0 liên tiếp.

**Bài 11:**

**Dãy các số Fibonacci thõa $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, cho điều kiện đầu: $\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \end{cases}$. Hãy tìm hệ thức truy hồi của Fibonacci.**

**Giải**

Phương trình đặc trưng: $x^2 - x - 1 = 0$

có các nghiệm là: $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Do đó các số Fibonacci tổng quát sẽ có dạng: $f_n = \alpha_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

với các điều kiện ban đầu : $\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \alpha_2 = \dfrac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$

Do đó các số Fibonacci được cho bởi công thức như sau:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

**Bài 12:**

**Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi sau: $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ trong đó các điều kiện đầu là: $a_0 = 7$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$.**

**Giải**

Phương trình đặc trưng $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) = 0$

Các nghiệm của phương trình đặc trưng: $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Do đó, hệ thức truy hồi sẽ có dạng: $a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2(-2)^n + \alpha_3 3^n$

Với các điều kiện đầu được cho: $a_0 = 7$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$. Ta có hệ phương trình như sau:

$$\begin{cases} 7 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ -4 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 8 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi là: $a_n = 5 + 3(-2)^n - 3^n$

**Bài 13:**

**Tìm hệ thức truy hồi và $r_n$. Với $r_n$ là số miền của mặt phẳng bị phân chia bởi n đường thẳng. Biết rằng không có 2 đường thẳng nào song song và cũng không có 03 đường thẳng nào đi qua cùng 1 điểm.**

**Giải**

Với n đường thẳng, theo đề bài thì đường thẳng thứ n sẽ cắt n – 1 đường thẳng còn lại tại n – 1 điểm, tức là sẽ cắt n – 1 + 1 = n phần mặt phẳng. Do đó, số phần mặt phẳng tăng lên là n. Từ đó, ta có được hệ thức truy hồi: $r_n = r_{n-1} + n$.

Các điều kiện đầu là:
n = 0: $r_0 = 1$.
n = 1: $r_1 = 2$.

## BÀI TẬP CHƯƠNG II

**Bài 14**

**Chứng minh rằng trong một đơn đồ thị luôn có ít nhất 02 đỉnh có cùng bậc.**

**Giải**

Trong đồ thị đơn, số bậc tối đa cung

*TH1:* Giả sử đồ thì không có đỉnh treo, do đó số bậc tối thiểu của các đỉnh là 1, số bậc tối đa của các đỉnh là n-1 (vì là đơn đồ thị). Có n đỉnh, số bậc của các đỉnh đi từ 1 đến n-1 (n-1) giá trị. Do đó theo nguyên lý Dirichlet phải có ít nhất 02 đỉnh có cùng bậc.

*TH2*: Giả sử đồ thị có ít nhất 01 đỉnh treo, khi đó số bậc tối thiểu của các đỉnh là 0, và số bậc tối đa chỉ là n-2 (vì là đơn đồ thị, đồng thời có đỉnh treo). Có n đỉnh, số bậc của các đỉnh chỉ có thể đi từ 0 đến n-2 (n-1) giá trị. Do đó theo nguyên lý Dirichlet phải có ít nhất 02 đỉnh có cùng bậc.

**Bài 15:**

**Tính tổng số bậc của $K_n$ (đơn đồ thị đủ).**

**Giải**

Với đồ thị đủ thì mỗi đỉnh đều nối với các đỉnh còn lại. Do vậy, khi có n đỉnh thì mỗi đỉnh đều nối với n -1 đỉnh còn lại, tức là bậc của mỗi đỉnh đều bằng n – 1.

Vậy, tổng số bậc của cả đồ thị là: n*(n – 1) bậc.

***II. Các bài tập trong giấy kiểm tra lần 1.***

**Bài 16:** *(giống bài 12 phần trước).*

**Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi sau:** $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$
**trong đó các điều kiện đầu là:** $a_0 = 7$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$.

**Giải**

Phương trình đặc trưng $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) = 0$

Các nghiệm của phương trình đặc trưng: $\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Do đó, hệ thức truy hồi sẽ có dạng: $a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2(-2)^n + \alpha_3 3^n$

Với các điều kiện đầu được cho: $a_0 = 7$, $a_1 = -4$, $a_2 = 8$. Ta có hệ phương trình như sau:

$$\begin{cases} 7 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ -4 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ 8 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 3 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ thức truy hồi là: $a_n = 5 + 3(-2)^n - 3^n$

**Bài 17:**

**Trong tổng số 2504 sinh viên của một khoa công nghệ thông tin, có 1876 theo học môn NNLT Pascal, 999 học môn ngôn ngữ Fortran và 345 học môn ngôn ngữ C. Ngoài ra còn biết 876 sinh viên học cả Pascal và Fortran, 232 học cả Fortran và C, 290 học cả Pascal và C. Nếu 189 sinh viên học cả 03 môn Psacal, Fortran và C thì trong trường hợp đó có bao nhiêu sinh viên không học môn nào trong cả 03 môn nói trên.**

**Giải**

Gọi P: là tập gồm các SV học Pascal
F: là tập gồm các SV học Fortran
C: là tập gồm các SV học C
N: là tổng số SV (2504 SV)
Gọi K là số SV học ít nhất 01 môn

Theo nguyên lý bù trừ, ta có:

$$K = |P \cup F \cup C| = |P| + |F| + |C| - |P \cap F| - |F \cap C| - |C \cap P| + |P \cap F \cap C|$$

$$K = 1876 + 999 + 345 - 876 - 232 - 290 + 189 = 2011 \Rightarrow \overline{K} = N - K = 2504 - 2011 = 493 \text{ SV}$$

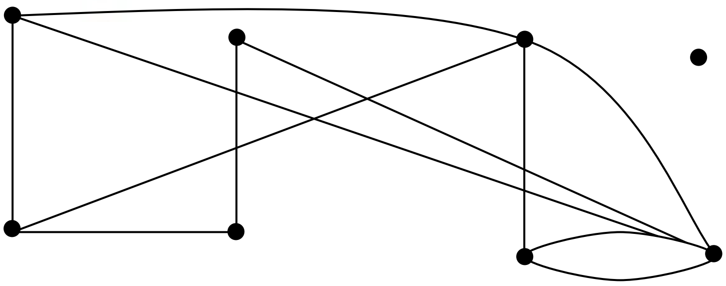
Vậy có 493 SV không học môn nào trong 03 môn: Pascal, Fortran và C.

**Bài 18:**

**Hãy tìm số đỉnh, số cạnh, số bậc của mỗi đỉnh và xác định các đỉnh cô lập, đỉnh treo, ma trận liền kề, ma trận liên thuộc trong mỗi đồ thị vô hướng sau:**

**Giải**

*Câu 18.1.*



Số đỉnh: 8
Số cạnh: 11
Đỉnh cô lập: D
Đỉnh treo: không có

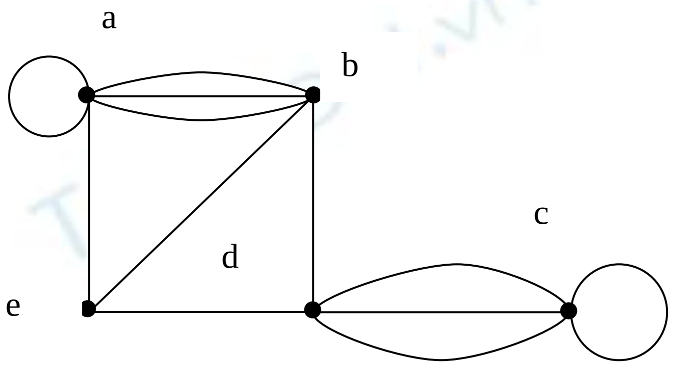
| Tên đỉnh | a | b | C | d | e | g | h | i |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Bậc của định | 3 | 2 | 4 | 0 | 5 | 3 | 2 | 3 |

Ma trận liền kề: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, thứ tự đỉnh: a, b, c, d, e, g, h, i

Ma trận liên thuộc:
$$\begin{array}{c|ccccccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} \\ \hline A & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ G & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ H & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ I & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

trong đó: $\begin{cases} e_1 = (a,c) \\ e_2 = (a,e) \\ e_3 = (a,i) \\ e_4 = (b,e) \end{cases}$ $\begin{cases} e_5 = (b,h) \\ e_6 = (c,e) \\ e_7 = (c,g) \\ e_8 = (c,i) \end{cases}$ $\begin{cases} e_9 = (e,g) \\ e_{10} = (e,g) \\ e_{11} = (h,i) \end{cases}$

*Câu 18.2.*




Số đỉnh: 5
Số cạnh: 12
Đỉnh cô lập: không có
Đỉnh treo: không có

| Tên đỉnh | a | b | c | d | e |
|---|---|---|---|---|---|
| Bậc của định | 6 | 5 | 5 | 5 | 3 |

Ma trận liền kề: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, thứ tự đỉnh: a, b, c, d,

Ma trận liên thuộc:
$$\begin{array}{c|cccccccccccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} & e_{12} \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

trong đó: $\begin{cases} e_1 = (a,a) \\ e_2 = (a,b) \\ e_3 = (a,b) \\ e_4 = (a,b) \end{cases}$ $\begin{cases} e_5 = (a,e) \\ e_6 = (b,e) \\ e_7 = (b,d) \\ e_8 = (c,c) \end{cases}$ $\begin{cases} e_9 = (c,d) \\ e_{10} = (c,d) \\ e_{11} = (c,d) \\ e_{12} = (d,e) \end{cases}$

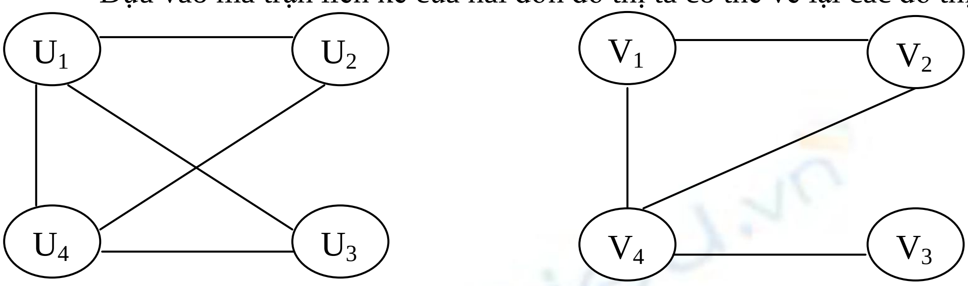
**Bài 19:**

**Hai đơn đồ thị với ma trận liền kề sau đây có là đẳng cấu không?**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Giải**

Dựa vào ma trận liền kề của hai đơn đồ thị ta có thể vẽ lại các đồ thị bằng hình vẽ:




Theo hình vẽ của hai đơn đồ thị ta thấy chúng không có cùng số cạnh, một bên có 4 cạnh và một bên có 5 cạnh. Vậy hai đồ thị có ma trận liền kề đã cho ở trên không đẳng cấu.

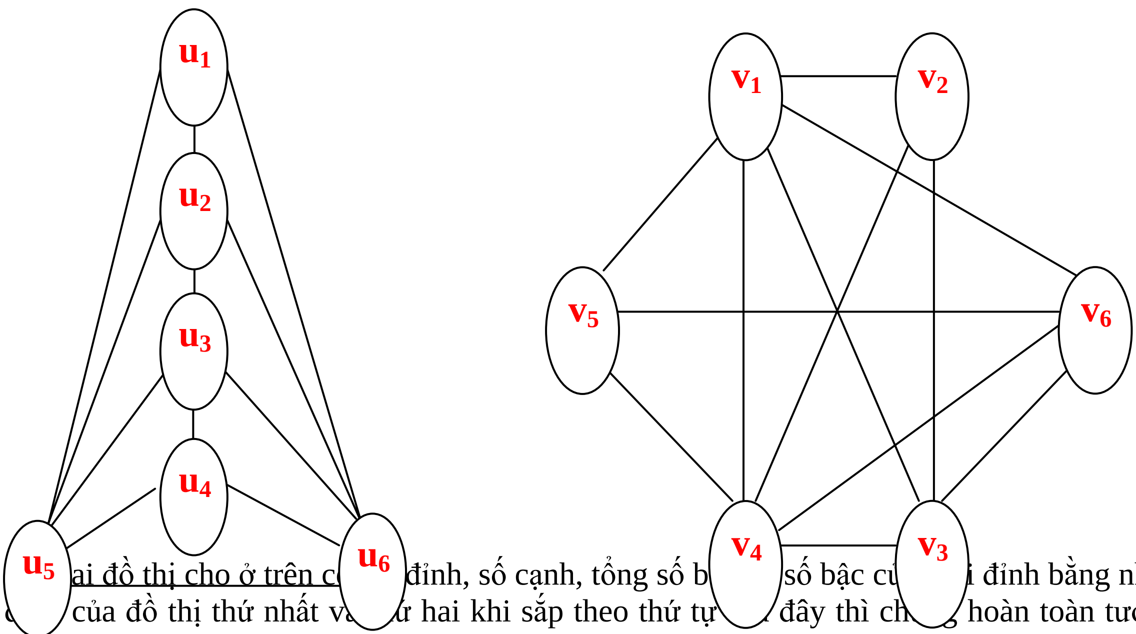
Bài toán này có thể không cần vẽ hình lại cũng được, từ ma trận kề ta cũng có thể dễ dàng xác định được số cạnh của mỗi đồ thị lần lượt là 4 và 5. Do vậy chúng không thể đẳng cấu.

**Bài 20:**

**Xét xem các đồ thị cho sau đây có đẳng cấu với nhau không?**

**Giải**

*a. Hình 01.*



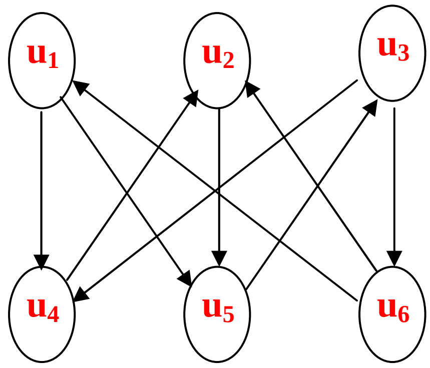

ai đồ thị cho ở trên c đỉnh, số cạnh, tổng số b số bậc c i đỉnh bằng nhau. Đặc biệt, các của đồ thị thứ nhất v r hai khi sắp theo thứ tự đây thì ch g hoàn toàn tương đương về mọi mặt:

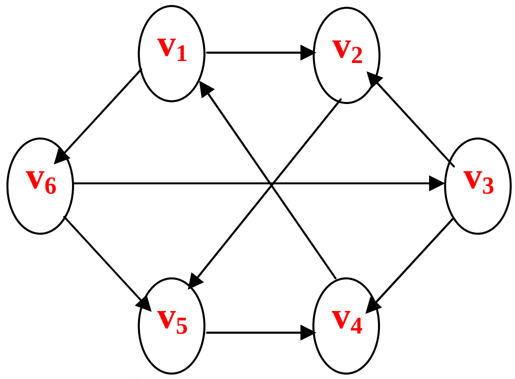
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Đồ thị thứ nhất | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ |
| Đồ thị thứ hai | $v_5$ | $v_6$ | $v_3$ | $v_2$ | $v_1$ | $v_4$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Số bậc của mỗi đỉnh | 3 | 4 | 4 | 3 | 5 | 5 |

Chính vì vậy, hai đồ thị trên là đẳng cấu.

*b. Hình 02.*




Hai đồ thị có hướng cho ở trên khi sắp theo thứ tự sau đây về các đỉnh thì chúng tương đương về tất cả các mặt: từ số đỉnh, tổng số bậc, bậc vào, bậc ra của mỗi đỉnh, tổng số cạnh, thứ tự và chiều của các cạnh đều tương ứng:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Đồ thị thứ nhất | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ | $u_4$ | $u_5$ | $u_6$ |
| Đồ thị thứ hai | $v_3$ | $v_5$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_4$ | $v_6$ |
| Bậc vào: $deg^-(X)$ | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| Bậc ra: $deg^+(X)$ | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 |

Vì vậy, hai đồ thị có hướng ở trên là đẳng cấu với nhau.

**<u>Bài 21:</u>** *(3.1)*

**Cho G là đồ thị có v đỉnh và e cạnh, còn m và M tương ứng là bậc nhỏ nhất và lớn nhất các đỉnh của G. Chứng tỏ rằng:** $m \le \frac{2e}{v} \le M$

**<u>Giải</u>**

Vì m và M tương ứng là bậc nhỏ nhất và lớn nhất các đỉnh của G, do đó ta dễ dàng có được:

$$m \le \deg(v_i) \le M \,,\, i = \overline{1, v} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{v} \deg(v_i) \ge v.m \\ \sum_{i=1}^{v} \deg(v_i) \le v.M \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2e \ge v.m \\ 2e \le v.M \end{cases} \Leftrightarrow v.m \le 2e \le v.M \Leftrightarrow m \le \frac{2e}{v} \le M \qquad \text{(đpcm)}$$

**<u>Bài 22:</u>** *(3.2)*

**Chứng minh rằng nếu G là đơn đồ thị phân đôi có v đỉnh và e cạnh, khi đó chứng minh bất đẳng thức sau đây:** $e \le \frac{v^2}{4} \, (1)$

**<u>Giải</u>**

Gọi $n_1$, $n_2$ lần lượt là số đỉnh của mỗi phần ($n_1 + n_2 = v$). Vì là đơn đồ thị phân đôi nên số cạnh nhiều nhất khi nó là đơn đồ thị phân đôi đủ, tức là: $K_{n_1,n_2}$ .

Khi đó, số cạnh nhiều nhất sẽ là: $n = n_1 \times n_2 \Leftrightarrow e \le n_1 n_2 (2)$.

Ta dễ dàng có được:

$$(n_1 - n_2)^2 \ge 0 \Leftrightarrow n_1^2 - 2n_1n_2 + n_2^2 \ge 0 \Leftrightarrow n_1^2 + 2n_1n_2 + n_2^2 \ge 4n_1n_2$$

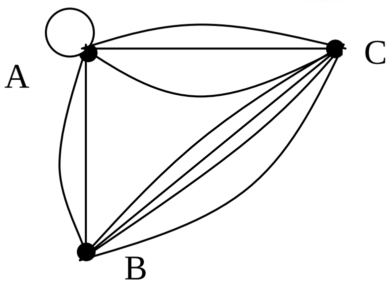
$$\Leftrightarrow \frac{(n_1+n_2)^2}{4} \ge n_1n_2 \ge e \xrightarrow{(2)} \frac{v^2}{4} \ge e \text{ (đpcm).}$$

**<u>Bài 23:</u>** *(3.4)*

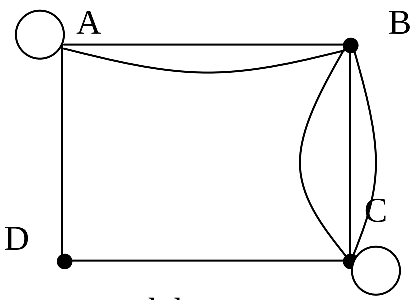
**Hãy vẽ các đồ thị vô hướng biểu diễn bởi các ma trận sau:**

**a.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

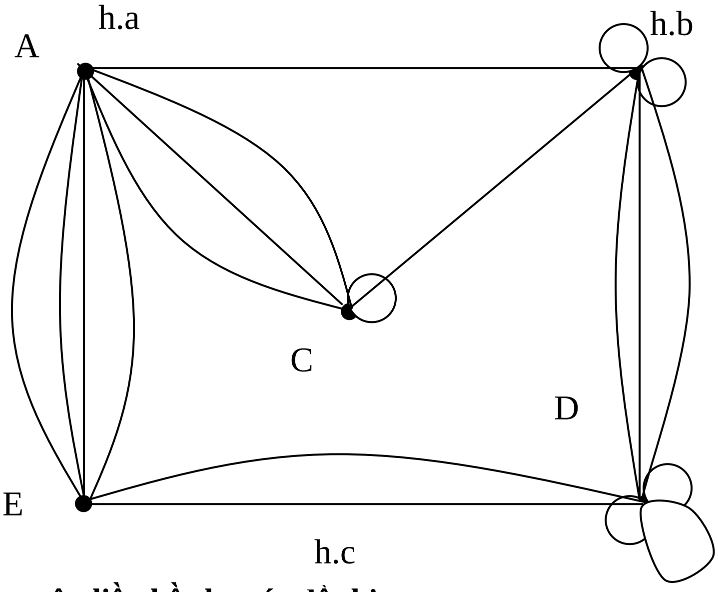
**<u>Giải</u>**



h.a



h.b



h.c

**<u>Bài 24:</u>** *(3.6)*

**Tìm ma trận liền kề cho các đồ thị sau:**

**a.$K_n$** **b.$C_n$** **c.$W_n$** **d.$K_{m,n}$** **e.$Q_n$**

**<u>Giải</u>**